Topologia
Lista 4 (Ciągłość)

Zad 1. Wykazać, że każde odwzorowanie przestrzeni dyskretnej w dowolną przestrzeń topologiczną jest ciągłe.

Zad 2. Niech X będzie przestrzenią topologiczną rozważaną w ostatnim zadaniu listy 3. Czy odwzorowanie $f : X \to X$ dane wzorem $f(x_n) = x_{n+1}$ jest ciągłe?

Zad 3. Wyznaczyć wszystkie funkcje ciągłe z przestrzeni antydyskretnej w prostą euklidesową.

Zad 4. Kiedy przekształcenie identycznościowe $f : (X, \tau_1) \to (X, \tau_2)$ jest ciągłe?

Zad 5. Podać przykład funkcji na prostej euklidesowej, która jest ciągła tylko w jednym punkcie.

Zad 6. Podać przykład funkcji na prostej euklidesowej, ciągłej tylko w liczbach niewymiernych.

Zad 7. Niech $\mathbb{R}$ będzie prostą euklidesową, a $\mathbb{R}_l$ przestrzenią topologiczną $(\mathbb{R}, \tau_{[\,)})$, gdzie $\tau_{[\,)}$ jest topologią zdefiniowaną na liście 3. Które z przekształceń jest ciągłe

$$\begin{array}{ll} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_l, \quad \text{gdzie } f(x) = x, & g : \mathbb{R}_l \to \mathbb{R}, \quad \text{gdzie } g(x) = x, \\ h : \mathbb{R}_l \to \mathbb{R}, \quad \text{gdzie } h(x) = \lfloor x \rfloor, & i : \mathbb{R}_l \to \mathbb{R}, \quad \text{gdzie } i(x) = \lfloor x \rfloor - x + 1 \\ j : \mathbb{R}_l \to \mathbb{R}, \quad \text{gdzie } j(x) = |x|, & k : \mathbb{R}_l \to \mathbb{R}_l, \quad \text{gdzie } k(x) = |x|. \end{array}$$

Przez $\lfloor x \rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$ oznaczamy tzw. część całkowitą liczby x.

Zad 8. Udowodnić, że funkcja $f : \mathbb{R}_l \to \mathbb{R}$ jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest prawostronnie ciągła.

Zad 9. Zbudować przykład surjektywnej funkcji ciągłej $f : X \to Y$, gdzie X i Y są podprzestrzeniami prostej euklidesowej, przy czym

a) $X = (a, b), \quad Y = [c, d)$, b) $X = [a, b), \quad Y = [c, d)$, c) $X = [a, b), \quad Y = (c, d)$.

Czy istnieje taka funkcja w przypadkach d) $X = [a, b]$, $Y = [c, d)$; e) $X = [a, b]$, $Y = (c, d)$?

Zad 10. Niech $[0, 1]$ oraz $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ będą odpowiednio popdrzestrzeniami prostej oraz płaszczyzny euklidesowej. Czy istnieje surjektywna funkcja ciągła

a) $f : [0, 1] \to S^1$, b) $f : S^1 \to [0, 1]$?

Zad 11. Niech $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 4\}$ oraz Y będą wyposażone w topologię euklidesową. Znaleźć surjektywną funkcję ciągłą $f : X \to Y$, gdy

a) $Y = [0, 1]$, b) $Y = [0, 1)$, c) $Y = (0, 1)$,

d) $Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$, e) $Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Zad 12. Niech X będzie dowolną przestrzenią topologiczna, Y przestrzenią Haudorffa, a $f : X \to Y$ funkcja ciągłą. Pokazać, że wykres

$$G = \{(x, y) \in X \times Y : y = f(x)\}$$

jest domkniętym podzbiorem przestrzeni produktowej $X \times Y$.

Zad 13. Pokazać, że zbiór punktów stałych ciągłego odwzorowania $f : X \to X$ przestrzeni Hausdorffa X jest zbiorem domkniętym.